Sensitivity of Linear Systems

Absolute Error

Original Linear System, for a given $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, b \in \mathbb{C}^n$

$$Ax = b$$

Perturbed Linear System

$$A(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

Absolute Error

Original Linear System, for a given $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, b \in \mathbb{C}^n$

$$Ax = b$$

Perturbed Linear System

$$A(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|\delta b\|_2} \leq \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$$

Relative Error

Now let us consider

$$\frac{\|\delta x\|_2 / \|x\|_2}{\|\delta b\|_2 / \|b\|_2}.$$

Relative Error

Now let us consider

$$\frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2}.$$

- Due to the submultiplicative property

$$Ax = b$$

Relative Error

Now let us consider

$$\frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2}.$$

- Due to the submultiplicative property

$$\begin{aligned} Ax = b &\implies \|A\|_2\|x\|_2 \geq \|b\|_2 \\ &\implies \frac{1}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2\frac{1}{\|b\|_2}. \end{aligned}$$

Relative Error

Now let us consider

$$\frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2}.$$

- Due to the submultiplicative property

$$\begin{aligned} Ax = b &\implies \|A\|_2\|x\|_2 \geq \|b\|_2 \\ &\implies \frac{1}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2\frac{1}{\|b\|_2}. \end{aligned}$$

- Combining this with $\|\delta x\|_2/\|\delta b\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2$, we have

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A^{-1}\|_2\|A\|_2\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}.$$

Relative Error

$$\frac{\|\delta x\|_2 / \|x\|_2}{\|\delta b\|_2 / \|b\|_2} \leq \|A^{-1}\|_2 \, \|A\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Relative Error

$$\frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2} \;\leq\; \|A^{-1}\|_2\,\|A\|_2 \;=\; \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Definition (Condition Number of $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

$$\kappa_2(A) \;=\; \|A^{-1}\|_2\,\|A\|_2 \;=\; \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Relative Error

$$\frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2} \;\leq\; \|A^{-1}\|_2\,\|A\|_2 \;=\; \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Definition (Condition Number of $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

$$\kappa_2(A) \;=\; \|A^{-1}\|_2\,\|A\|_2 \;=\; \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Example.

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^{-8} \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \approx \sqrt{2}, \quad \sigma_2 \approx 10^{-8}/\sqrt{2}$$

$$\kappa_2(A) \approx \sigma_1/\sigma_2 = 2\cdot 10^8$$